УДК 62-50

Л.М. ЛЮБЧИК, д-р техн. наук***, М.Н. МАЛЬКО,*** канд. техн. наук

СИНТЕЗ РОБАСТНЫХ КОМБИНИРОВАННЫХ СИСТЕМ С ДИНАМИЧЕСКИМИ КОМПЕНСАТОРАМИ ВОЗМУЩЕНИЙ

Розглянуто задачу синтезу багатовимірних комбінованих систем управління з динамічними компенсаторами збурень. Структура компенсатора отримані за допомогою теорії обернених динамічних моделей. Для вирішення задачі параметричного синтезу компенсаторів в умовах дії невизначених завад запропоновано робастний підхід на основі мінімізації функціоналу якості у вигляді норми передавальної функції сигналу похибки управління.

Введение. Задача компенсации возмущений приобретает особую значимость в связи с необходимостью создания высокоточных систем управления технологическими процессами. Существенного повышения точности управления можно достичь путем использования принципа комбинированного управления [1], реализуемого на основе разомкнуто-замкнутых структур с компенсаторами возмущений, построенных в виде последовательного соединения обратных и прогнозирующих моделей. Реализация указанного принципа для многомерных систем наталкивается на существенные трудности, связанные с необходимостью обращения многомерной передаточной матрицы объекта управления. В настоящей работе на основе использования реализаций многомерных обратных динамических систем в пространстве состояний [2] получены уравнения динамических компенсаторов возмущений и решена задача параметрического синтеза робастных комбинированных систем при наличии неопределенных помех.

Постановка задачи. Задачу синтеза дискретной комбинированной системы управления будем рассматривать применительно к объекту вида:

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + B_f f_k, \quad y_k = Cx_k, \tag{1}$$

где $x_k \in \mathbf{R}^n$ – вектор состояний объекта на k - ом шаге, $u_k \in \mathbf{R}^m$ – вектор управляющих входных сигналов, $f_k \in \mathbf{R}^{mf}$ – вектор измеряемых возмущений, $y_k \in \mathbf{R}^q$ – вектор выходных регулируемых переменных. Без ограничения общности можно принять, что $\operatorname{rank} B = m$, $\operatorname{rank} B_f = m_f$, $\operatorname{rank} C = q$.

Будем предполагать, что вектор возмущений f_k в каждый момент времени k является ограниченным по амплитуде $\left|f_k\right|_2 \le c_f < \infty$ и скорости изменения $\left|v_k^f\right|_2 \le c_f^1 < \infty$, $v_k^f = f_k - f_{k+1}$.

Синтез системы комбинированного управления. Выберем закон комбинированного управления в виде суммы стабилизирующей и компенсирующей компонент $u_k = u_k^s + u_k^c$. Стабилизирующая компонента управления u_k^s принимается в виде $u_k^s = K \cdot e_k^y$, где $e_k^y = y_k^* - y_k$ - ошибка регулирования, y_k^* – задающее воздействие K – матрица коэффициентов линейной стабилизирующей обратной связи. Выбор этой матрицы может осуществляться известными методами синтеза модального управления по выходу. Для простоты ограничимся рассмотрением случая $y_k^* = 0$ (типичная для технологических приложений задача компенсации влияния возмущений на отклонения регулируемых переменных от номинальных значений).

Компенсирующая компонента управления u_k^c формируется с помощью предложенного в [2] многомерного динамического компенсатора построенного на основе регуляризованной обратной [3] и прогнозирующей моделей:

$$\bar{x}_{k+1}^c = \bar{F}(\varepsilon, P_2)\bar{x}_k^c + R(P_2)\Pi(\varepsilon)B_f f_k, \quad \bar{u}_k^c = -\bar{B}(\varepsilon)\left[CAQ\bar{x}_k^c + CB_f f_k\right]. \tag{2}$$

где матрицы $\bar{F}(\varepsilon) = R\Pi(\varepsilon)AQ$, $\bar{H}(\varepsilon) = RBS^+(\varepsilon)$, $\bar{B}(\varepsilon) = B^+(H(\varepsilon) + P\Omega(\varepsilon))$ $\Pi(\varepsilon) = I_n - H(\varepsilon)C$, $\Omega(\varepsilon) = I_q - SS^+(\varepsilon)$ зависят от настроечных параметров компенсатора ε, P_2. Матрица $S^+(\varepsilon) = S^{\mathrm{T}}\left(\varepsilon I_q + SS^{\mathrm{T}}\right)^{-1}$ представляет собой регуляризованное псевдообращение матрицы S, причем $S^+(\varepsilon)\big|_{\varepsilon=0} = S^{-1}$ и $S^+(\varepsilon)\big|_{\varepsilon=\infty} = 0$.

Исследуем динамические характеристики разомкнуто-замкнутой комбинированной системы с динамическим компенсатором возмущений. Получим уравнение ошибки регулирования для замкнутой комбинированной системы управления с объектом (1) и синтезированным компенсатором возмущений пониженного порядка (2).

Для вывода уравнения динамики ошибки регулирования получим вначале уравнение для выхода объекта (1) в следующем виде

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= CAx_k + CBu_k + CB_f f_k = Ax_k + CB(-Ky_k + \bar{u}_k^c) + CB_f f_k = \\ &= CAx_k + CBKy_k - CB\bar{B}(\varepsilon)CAQ\bar{x}_k^c - \left(I - CB\bar{B}(\varepsilon)\right)CB_f f_k. \end{aligned}$$

Далее, воспользовавшись матричными тождествами, справедливость которых устанавливается непосредственно,

$$I_q - S\bar{B}(\varepsilon) = \left(I_q - SB^{+}P\right)\Omega(\varepsilon), \quad S\bar{B}(\varepsilon) = I_q - \left(I_q - SB^{+}P\right)\Omega(\varepsilon),$$
$$B\bar{B}(\varepsilon) = BS^{-1}\left(I_q - \left(I_q - SB^{+}P\right)\Omega(\varepsilon)\right),$$

и учитывая, что $x_k - Q\bar{x}_k^c = (QR + PC)x_k - Q\bar{x}_k^c = Q\bar{\theta}_k - Pe_k$, где $\bar{\theta}_k = Rx_k - \bar{x}_k^c$, после ряда алгебраических преобразований получим уравнения динамики ошибки регулирования

$$\begin{aligned} e_{k+1} &= C(AP - BK)e_k - CAQ\bar{\theta}_k + \Lambda_1(\varepsilon)\bar{f}_k, \\ \bar{\theta}_{k+1} &= R(BK - AP)e_k + RAQ\bar{\theta}_k + \Lambda_2(\varepsilon)\bar{f}_k, \\ \bar{f}_k &= -CB_f f_k + CAQ\bar{x}_k^c, \end{aligned} \tag{3}$$

где матрицы $\Lambda_1(\varepsilon) = \left(I_q - SB^{+}P\right)\Omega(\varepsilon)$, $\Lambda_2(\varepsilon) = RBB^{+}P\Omega(\varepsilon)$. Очевидно, что $\Omega(\varepsilon = 0) = 0$, $S\bar{B}_u(\varepsilon = 0) = I_q$ и $S\bar{B}_u(\varepsilon = \infty) = SB_u{}^{+}P$.

Обозначив $x_k^0 = Q\bar{\theta}_k - Pe_k$ представим уравнения (3) в следующей эквивалентной форме:

$$x_{k+1}^0 = (A - BKC)x_k^0 + \bar{\Lambda}(\varepsilon)\bar{f}_k, \quad e_k = -Cx_k^0, \tag{4}$$

где $\bar{\Lambda}(\varepsilon, P_2) = \left(I - BB^{+}\right)P\Omega(\varepsilon)$, причем $\bar{\Lambda}(\varepsilon = 0) = 0$.

Заметим, что x_k^0 представляет собой вектор состояния замкнутой системы, а вектор $\bar{f}_k$ можно трактовать как эквивалентное возмущение.

Из уравнений (4) следует, что введение в закон управления дополнительной компенсирующей компоненты, сформированной с помощью синтезированного компенсатора возмущений, приводит к эффекту, эквивалентному преобразованию исходного возмущения с помощью некоторого формирующего динамического фильтра. При этом влияние эквивалентного возмущения $\bar{f}_k$ на ошибку регулирования определяется матрицей $\bar{\Lambda}(\varepsilon, P_2)$, зависящей в свою очередь от выбора настроечных параметров компенсатора.

Параметрическая оптимизация комбинированных систем. В реальных ситуациях возмущающее воздействие измеряется с некоторой погрешностью (помехой) $f_k + \xi_k$, влияние которой должно приниматься во внимание при решении задачи параметрического синтеза и оптимизации компенсатора. С целью формализации указанной задачи с учетом имеющейся априорной информации о помехах измерений, получим предварительно выражения для ошибки регулирования в условиях воздействия помех ξ. Для этого воспользуемся уравнениями динамического компенсатора с дополнительной помехой на входе:

В результате ряда алгебраических преобразований, получим уравнение для динамики ошибки регулирования в следующем виде

$$\begin{aligned} e_{k+1} &= C(AP - BK)e_k - CAQ\bar{\theta}_k + \Lambda_1(\varepsilon)\bar{f}_k - S\bar{B}CB_f\xi_k, \\ \bar{\theta}_{k+1} &= R(BK - AP)e_k + RAQ\bar{\theta}_k + \Lambda_2(\varepsilon)\bar{f}_k - R\left(\Pi(\varepsilon) + B\bar{B}C\right)B_f\xi_k, \end{aligned} \tag{5}$$

$\bar{f}_k = -CB_f f_k + CAQ\bar{x}_k^c$, $\Lambda_1(\varepsilon, P_2) = \left(I_q - SB^+P\right)\Omega(\varepsilon)$, $\Lambda_2(\varepsilon, P_2) = RBB^+P\Omega(\varepsilon)$.

Из выражений (5) получим уравнения замкнутой системы и ошибки регулирования при наличии помех измерений:

$$x_{k+1}^0 = (A - BKC)x_k^0 + \bar{\Lambda}(\varepsilon)\bar{f}_k - \bar{\Gamma}(\varepsilon)\xi_k, \quad e_k = -Cx^0, \tag{6}$$

где $\bar{\Gamma}(\varepsilon) = \left(I_n - \left(I_n - BB^+\right)P\Omega(\varepsilon)C\right)B_f$, причем $\bar{\Gamma}(\varepsilon = 0) = B_f$.

Как следует из полученных выражений для динамики ошибки регулирования (6), реализация комбинированного управления на основе динамических компенсаторов на основе обратных моделей по своей сути эквивалентно некоторому динамическому преобразованию (модификации) внешних возмущающих воздействий с аддитивным включением преобразованных помех измерений. При этом многомерные передаточные функции указанных преобразований оказываются зависящими от параметров настройки, что делает возможным формализацию задачи параметрического синтеза компенсаторов по критерию точности регулирования. Для этого установим предварительно связь между дискретными Z - преобразованиями сигнала ошибки регулирования $e(z)$ и внешних воздействий $f(z)$ и $\xi(z)$:

$$e(z) = G_f(z)f(z) + G_\xi(z)\xi(z), \tag{7}$$

где дискретные матричные передаточные функции $G_f(z)$ и $G_\xi(z)$ равны

$$\begin{aligned} G_f(z) &= -C(zI_n - A + BKC)^{-1}\bar{\Lambda}(\varepsilon)C\left(AQ\left(zI_{n-q} - \bar{F}\right)^{-1}R\Pi - I_n\right)B_f, \\ G_\xi(z) &= C(zI_n - A + BKC)\bar{\Gamma}. \end{aligned} \tag{8}$$

Дальнейшая формализация постановки задачи параметрического синтеза и выбор метода ее решения существенным образом зависит от способа задания априорной информации о возмущающих воздействиях и помехах измерений. Рассмотрим решение задачи для задания априорной информации, в нестатистической форме. В этом случае в качестве моделей возмущающих воздействий и помех измерений принимают сигналы ограниченной энергии

$$\|f\|_2 = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} |f_k|_2^2} \le E_f < \infty, \quad \|\xi\|_2 = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} |\xi_k|_2^2} \le E_\xi < \infty. \tag{9}$$

Качество компенсации возмущений при этом будет характеризовать энергия сигнала ошибки регулирования E_e, верхняя оценка которой может быть получена с использованием известной теоремы о связи норм [4]:

$$E_u \le \overline{E}_u = \left\|G_f(z)\right\|_\infty E_f + \left\|G_\xi(z)\right\|_\infty E_\xi, \tag{10}$$

где $\mathbf{H}_\infty$ - норма матричной передаточной функции определяется как

$$\|G(z)\|_\infty = \sup_{|z|<1} \|G(z)\|_2 = \sup_{0 \le \omega \le 2\pi} \|G(j\omega)\|_2 = \sup_{0 \le \omega \le 2\pi} \lambda_{\max}^{1/2} [G^{\mathrm{T}}(e^{-j\omega}) G(e^{j\omega})].$$

В соответствии с общими свойствами $\mathbf{H}_\infty$ - норм, минимизация критерия $\overline{E}_u$ эквивалентна минимизации энергии ошибки регулирования для "наихудших" входных сигналов (возмущений и помех) ограниченной энергии, что реализует принцип робастной оптимизации [5]. Соответствующая задача параметрической $\mathbf{H}_\infty$ оптимизации компенсатора приобретает вид:

$$\overline{E}_e(\varepsilon, P_2) \to \min, \quad T_\Pi(\varepsilon, P_2) \le T^*, \quad \sigma(\varepsilon, P_2) \le \sigma^*. \tag{11}$$

и может быть решена известными численными методами.

Таким образом, общая задача параметрического синтеза комбинированной разомкнуто-замкнутой системы управления может быть декомпозирована на две независимые задачи:

- задачу синтеза основного замкнутого контура путем выбора матрицы коэффициентов обратной связи K из условия обеспечения его устойчивости и заданного качества переходных процессов;

- задачу синтеза компенсатора путем выбора настроечных параметров ε, P_2 из условия обеспечения максимальной точности компенсации возмущений при ограничениях по качеству его переходных процессов.

Предложенная методика позволяет оптимизировать настроечные параметры компенсатора с учетом априорной информации о возмущающих воздействиях и помехах измерений и получать оценки максимально достижимой точности управления в комбинированных системах.

Заключение. В результате проведенного анализа можно сделать вывод о том, что для минимально-фазовых объектов, допускающих выбор $\varepsilon = 0$, принципиально возможна полная компенсация возмущений, поскольку в этом случае $\overline{\Lambda}(0) = 0$. В общем же случае неминимально-фазовых объектов возможно достижение лишь определенной степени компенсации, определяемой компромиссом между требованиями точности управления и требованиями обеспечения требуемых динамических свойств компенсатора (в частности, его устойчивости).

Таким образом, для неминимально-фазовых объектов существует предельно достижимая точность компенсации возмущений, зависящая как от характеристик объекта, так и от выбранных настроечных параметров, обеспечивающих требуемые динамические характеристики компенсатора. Принципиальным является тот факт, что полученные выше соотношения позволяют количественно оценить максимально достижимую точность компенсации возмущений при выбранных значениях настроечных параметров. Это, в свою очередь, позволяет формализовать постановку задачи параметрического синтеза на основе компромисса между противоречивыми требованиями точности и качества комбинированных систем и тем самым обеспечить реализацию конструктивного подхода к формированию инженерной методики синтеза многомерных динамических компенсаторов и оценке на этапе проектирования предельно достижимой степени компенсации возмущений.

Список литературы: **1**. *Макаров И.М., Менский Б.М.* Линейные автоматические системы (элементы теории, методы расчета и справочный материал).– М.: Машиностроение, 1982. – 504 с. **2.** *Костенко Ю.Т., Любчик Л.М.* Системы управления с динамическими моделями. – Харьков: Основа, 1996. – 212 с. **3.** *Любчик Л.М., Малько М.Н.* Структурный синтез регуляризованных обратных систем пониженного порядка // Системний аналіз, управління і інформаційні технології: Вісник Харківського державного політехнічного університету. Збірка наукових праць. – Харків: ХДПУ, 1999. - Випуск 72.- С. 165-168. **4.** *Позняк А.С.* Основы робастного управления (Н-теория). – М.: МФТИ, – 1991. – 128 с. **5.** *Morari M., Zafirov E.* Robust processes control. – New Jersey: Prentice Hall, 1989. – 488 p.

Поступила в редколлегию 15.09.04.